Faculté Polydisciplinaire de Khouribga
Année Universitaire 2021/2022
SMIA (S1)

Examen de rattrapage d'algèbre 1
Durée : 1h
Documents autorisés

Ex. 1 — Trouver la négation des relations suivantes :

1) $\forall x \in G$, $\forall x \in G$, $xy = yx$ (commutativité d'une loi de composition interne) ;
2) $\exists x \in G$, $\forall y \in G$, $xy = yx = y$ (élément neutre d'une loi de composition interne) ;
3) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\forall y \in \mathbb{R}$, $(|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$ (fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) ;
4) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\big(x < y \Rightarrow \exists z \in \mathbb{Q},\ x < z < y\big)$ (densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$).

Ex. 2 — Soit $f : E \to F$ une application. On pose $\mathscr{S} = \{S \subset E \mid f^{-1}(f(S)) = S\}$. Montrer que

1) $\varnothing, E \in \mathscr{S}$. Pour tout $A \subset E$, $\quad f^{-1}(f(A)) \in \mathscr{S}$.
2) Si $(S_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\mathscr{S}$, $\quad \bigcap_{i\in I} S_i$, $\bigcup_{i\in I} S_i \in \mathscr{S}$.
3) Si $S \in \mathscr{S}$ et $A \subset E$, $\quad S \cap A = \varnothing \Longrightarrow S \cap f^{-1}(f(A)) = \varnothing$.
4) Si $S_1, S_2 \in \mathscr{S}$ avec $S_1 \subset S_2$, $\quad S_2 - S_1 \in \mathscr{S}$.